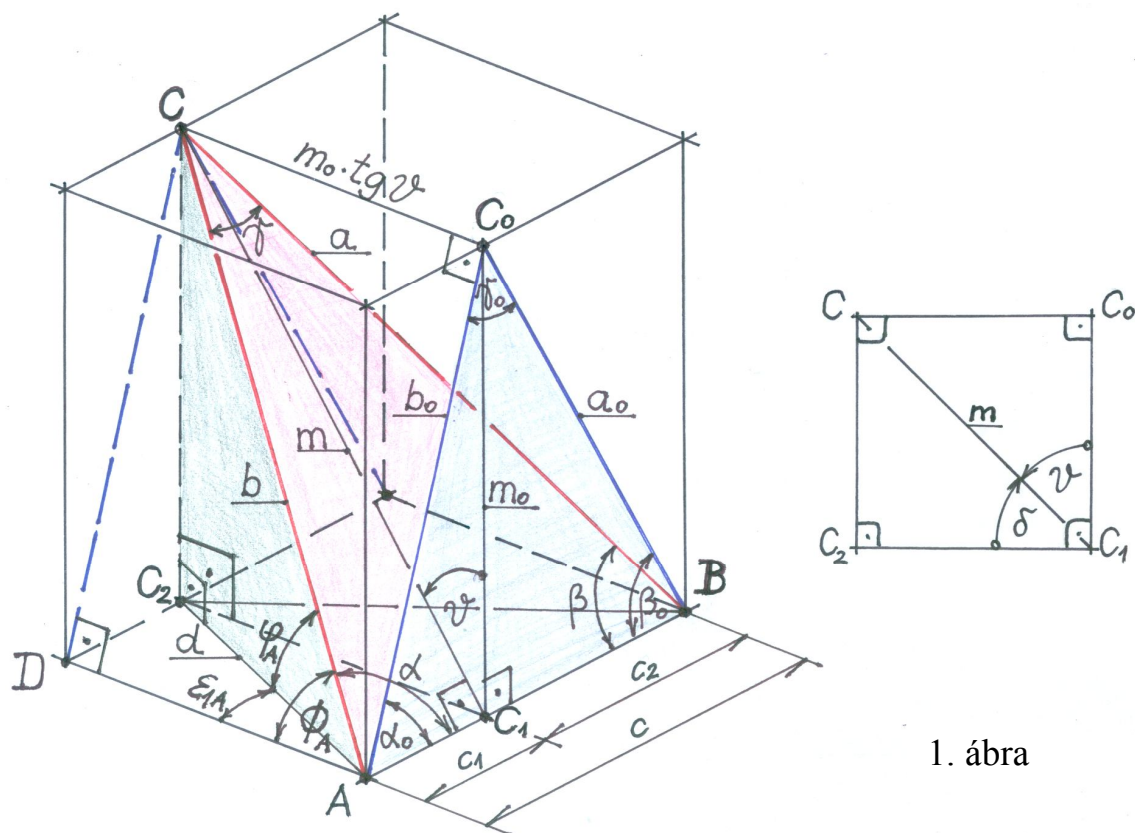


## Összefüggések egy csonkolt hasábra

Az idők során már többször készítettünk hasonló dolgozatokat. Nem baj: az ismétlés sosem árt. Most tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Eszerint úgy is képzelhetjük, hogy egy téglalap alapú egyenes hasábot először az  $\alpha_0$  és  $\beta_0$  hajlású síkokkal háromszög alapú hasábbá alakítunk, majd ezt csonkoljuk a  $\delta$  hajlású síkkal. A feladat: néhány szög - és terület - összefüggés áttekintése.

### Szög - összefüggések

Először határozzuk meg az  $\alpha = f_1(\vartheta)$ ,  $\beta = f_2(\vartheta)$ ,  $\gamma = f_3(\vartheta)$  kapcsolatokat!

Az 1. ábra alapján a  $C_0C_1C$  derékszögű háromszögből:

$$\cos \vartheta = \frac{m_0}{m} \rightarrow m(\vartheta) = \frac{m_0}{\cos \vartheta} . \quad (1)$$

Ezután:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{m_0}{c_1} , \quad (2)$$

valamint

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{c_1} ; \quad (3)$$

most ( 1 ), ( 2 ), ( 3 ) - mal:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_0}{c_1} \cdot \frac{1}{\cos \vartheta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\cos \vartheta} ,$$

tehát:

$$\underline{\underline{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\cos \vartheta} ,}} \quad (4)$$

illetve

$$\underline{\underline{\alpha(\vartheta) = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\cos \vartheta} \right]}} \quad (5)$$

Hasonlóan eljárva:

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{m_0}{c_2} , \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m}{c_2} , \quad (7)$$

majd ( 1 ), ( 6 ), ( 7 ) - tel:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m_0}{c_2 \cdot \cos \vartheta} = \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{\cos \vartheta} ,$$

tehát:

$$\underline{\underline{\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{\cos \vartheta} ,}} \quad (8)$$

illetve

$$\underline{\underline{\beta(\vartheta) = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{\cos \vartheta} \right] .}} \quad (9)$$

A harmadik szögre vonatkozó ismert összefüggés:

$$\underline{\underline{\gamma(\vartheta) = 180^\circ - [\alpha(\vartheta) + \beta(\vartheta)] .}} \quad (10)$$

Másodszor előállítjuk a többi szög függvényét is. Ismét az 1. ábra szerint:

$$\operatorname{tg} \Phi_A = \frac{b_0}{m_0 \cdot \operatorname{tg} \vartheta} ; \quad (11)$$

de

$$\sin \alpha_0 = \frac{m_0}{b_0} , \quad (12)$$

így (11) és (12) - vel:

$$\operatorname{tg} \Phi_A = \frac{1}{\sin \alpha_0 \cdot \operatorname{tg} \vartheta} . \quad (13)$$

Bevezetve az 1. ábra mellékábrája szerint a

$$\delta = 90^\circ - \vartheta \quad (14)$$

jelöléssel a csonkoló sík hajlásszögét, (13) és (14) - ből:

$$\operatorname{tg} \Phi_A = \frac{1}{\sin \alpha_0 \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \delta)} = \frac{1}{\sin \alpha_0 \cdot \operatorname{ctg} \delta} = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \alpha_0} ,$$

tehát:

$$\operatorname{tg} \Phi_A = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \alpha_0} . \quad (15)$$

Ezután az 1. ábra szerint:

$$\operatorname{tg} \varphi_A = \frac{m_0}{d} ; \quad (16)$$

de

$$d = \sqrt{c_1^2 + (m_0 \cdot \operatorname{tg} \vartheta)^2} ; \quad (17)$$

ehhez

$$c_1 = \frac{m_0}{\operatorname{tg} \alpha_0} , \quad (18)$$

így (14), (16), (17) és (18) - cal:

$$\operatorname{tg} \varphi_A = \frac{m_0}{d} = \frac{m_0}{\sqrt{c_1^2 + (m_0 \cdot \operatorname{tg} \vartheta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c_1}{m_0}\right)^2 + \operatorname{tg}^2 \vartheta}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \delta}\right)^2}} ,$$

tehát:

$$\operatorname{tg}\varphi_A = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\delta}\right)^2}} . \quad (19)$$

Ez átírható az elegánsabb

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_A} &= \sqrt{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\delta}\right)^2} , \\ \operatorname{ctg}\varphi_A &= \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha_0 + \operatorname{ctg}^2\delta} , \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

illetve a még könnyebben megjegyezhető

$$\operatorname{ctg}^2\varphi_A = \operatorname{ctg}^2\alpha_0 + \operatorname{ctg}^2\delta \quad (21)$$

alakba. Végül ismét az 1. ábra szerint:

$$\operatorname{tg}\varepsilon_{1A} = \frac{c_1}{m_0 \cdot \operatorname{tg}\vartheta} ; \quad (22)$$

most ( 14 ), ( 18 ) és ( 22 ) - vel:

$$\operatorname{tg}\varepsilon_{1A} = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\alpha_0} . \quad (23)$$

Megjegyezzük, hogy

~ a **B** csúcs körüli szög - összefüggések teljesen hasonlóan vezethetők le;

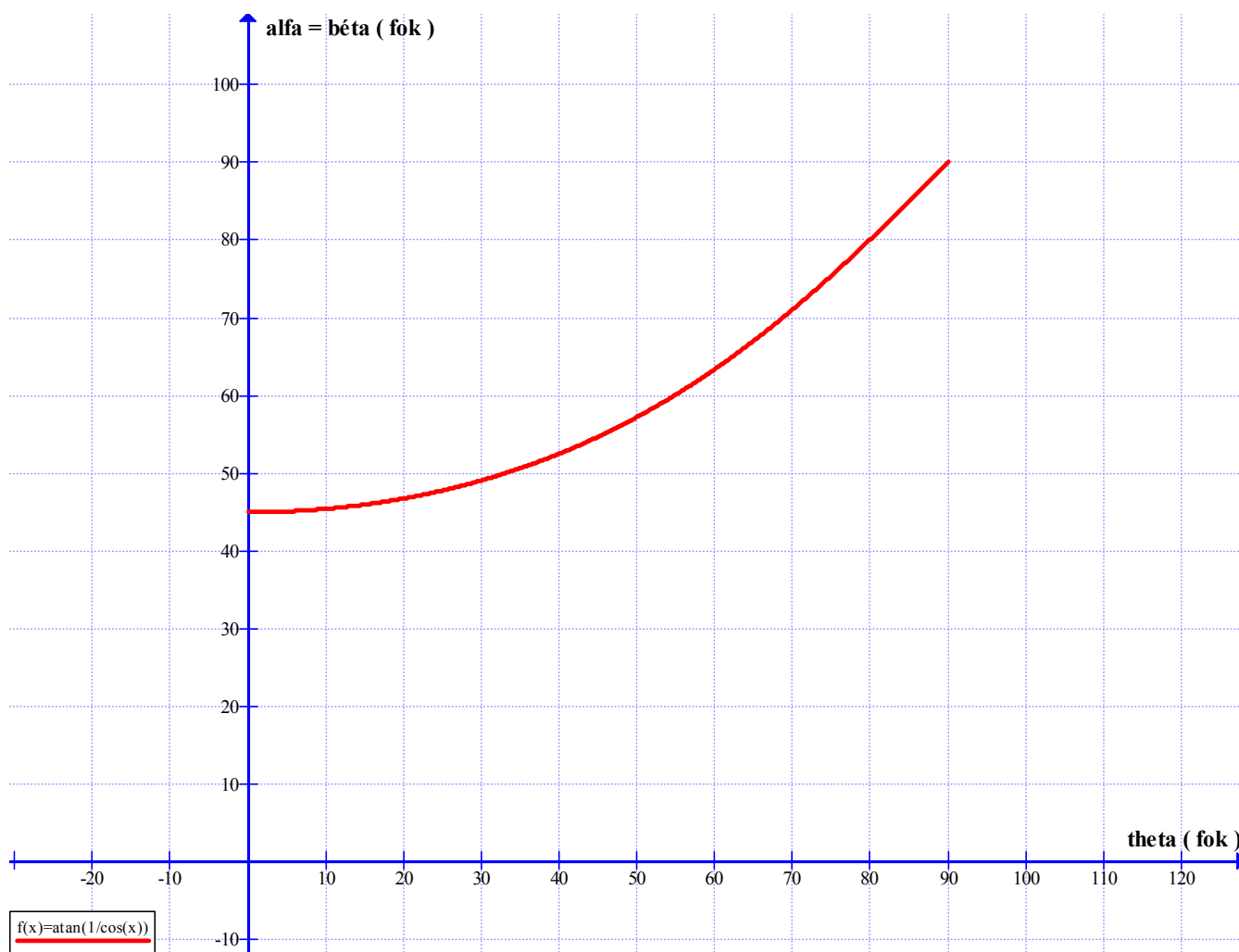
~ a ( 21 ) és ( 23 ) képletekkel leírt összefüggésekkel már korábbi dolgozatainkban is találkoztunk.

Egy kis szemléltetés:

$\alpha_0 = \beta_0 = 45^\circ$  esetén ( 5 ) és ( 9 ) szerint

$$\alpha(\vartheta) = \beta(\vartheta) = \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{\cos\vartheta}\right] .$$

Ezt a függvényt ábrázolja a 2. ábra.



2. ábra

Egy további kapcsolat:

$$\begin{aligned} \text{tg} \Phi_A &= \frac{\text{tg} \delta}{\sin \alpha_0} = \text{tg} \delta \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha_0}} = \text{tg} \delta \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0}{\sin^2 \alpha_0}} = \text{tg} \delta \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\text{tg}^2 \alpha_0}} = \\ &= \sqrt{\text{tg}^2 \delta + \frac{\text{tg}^2 \delta}{\text{tg}^2 \alpha_0}} = \sqrt{\text{tg}^2 \delta + \left( \frac{\text{tg} \delta}{\text{tg} \alpha_0} \right)^2} = \sqrt{\text{tg}^2 \delta + \text{tg}^2 \epsilon_{1A}} , \end{aligned}$$

tehát:

$$\underline{\text{tg} \Phi_A = \sqrt{\text{tg}^2 \delta + \text{tg}^2 \epsilon_{1A}} ;} \quad (24)$$

vagy ( 21 ) - hez hasonló alakban:

$$\underline{\text{tg}^2 \Phi_A = \text{tg}^2 \epsilon_{1A} + \text{tg}^2 \delta .} \quad (25)$$

A levezetett képleteken kívül szükség lehet még az alábbiakra is.

Az 1. ábra szerint:

$$c = c_1 + c_2 ; \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{m_0}{\operatorname{tg} \alpha_0} , \\ c_2 &= \frac{m_0}{\operatorname{tg} \beta_0} ; \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

most ( 26 ) és ( 27 ) - tel:

$$c = \frac{m_0}{\operatorname{tg} \alpha_0} + \frac{m_0}{\operatorname{tg} \beta_0} = m_0 \cdot \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_0} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_0} \right) ,$$

innen:

$$m_0 = \frac{c}{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_0} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_0}} , \quad (28)$$

majd ( 27 ) és ( 28 ) - cal:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{c}{1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\operatorname{tg} \beta_0}} , \\ c_2 &= \frac{c}{1 + \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{\operatorname{tg} \alpha_0}} . \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

### Terület - összefüggések

Ismét az 1. ábra alapján:

$$T_{AC_0C} = \frac{1}{2} \cdot b_0 \cdot m_0 \cdot \operatorname{tg} \vartheta ; \quad (30)$$

de

$$b_0 = \frac{c_1}{\cos \alpha_0} , \quad (31)$$

így az ( 1 ), ( 14 ), ( 30 ) és ( 31 ) képletekkel:

$$\begin{aligned}
T_{AC_0C} &= \frac{1}{2} \cdot b_0 \cdot m_0 \cdot \operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{2} \cdot \frac{c_1}{\cos \alpha_0} \cdot m_0 \cdot \operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{2} \cdot \frac{c_1}{\cos \alpha_0} \cdot m_0 \cdot \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{c_1}{\cos \alpha_0} \cdot \frac{m_0}{\cos \vartheta} \cdot \sin \vartheta = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot m \cdot \frac{\cos \delta}{\cos \alpha_0} = T_{AC_1C} \cdot \frac{\cos \delta}{\cos \alpha_0} ,
\end{aligned}$$

tehát:

$$T_{AC_0C} = T_{AC_1C} \cdot \frac{\cos \delta}{\cos \alpha_0} . \quad (32)$$

Innen leolvasható, hogy  $T_{AC_0C} = T_{AC_1C}$  , ha  $\delta = \alpha_0$  .

Hasonlóképpen:

$$T_{BC_0C} = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot m_0 \cdot \operatorname{tg} \vartheta ; \quad (33)$$

$$a_0 = \frac{c_2}{\cos \beta_0} , \quad (34)$$

így az ( 1 ), ( 14 ), ( 33 ) és ( 34 ) képletekkel:

$$\begin{aligned}
T_{BC_0C} &= \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot m_0 \cdot \operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{2} \cdot \frac{c_2}{\cos \beta_0} \cdot m_0 \cdot \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c_2}{\cos \beta_0} \cdot \frac{m_0}{\cos \vartheta} \cdot \sin \vartheta = \\
&= \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot m \cdot \frac{\cos \delta}{\cos \beta_0} = T_{BC_1C} \cdot \frac{\cos \delta}{\cos \beta_0} ,
\end{aligned}$$

tehát:

$$T_{BC_0C} = T_{BC_1C} \cdot \frac{\cos \delta}{\cos \beta_0} . \quad (35)$$

Innen leolvasható, hogy  $T_{BC_0C} = T_{BC_1C}$  , ha  $\delta = \beta_0$  .

Ismét az 1. ábra alapján:

$$T_{ABC} = T_{AC_1C} + T_{BC_1C} . \quad (36)$$

Most ( 32 ) -ből:

$$T_{AC_1C} = T_{AC_0C} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \delta} , \quad (37)$$

továbbá

$$T_{BC_1C} = T_{BC_0C} \cdot \frac{\cos \beta_0}{\cos \delta} , \quad (38)$$

így ( 36 ), ( 37 ), ( 38 ) szerint:

$$\begin{aligned} T_{ABC} &= T_{AC_0C} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \delta} + T_{BC_0C} \cdot \frac{\cos \beta_0}{\cos \delta} = \\ &= \frac{1}{\cos \delta} \cdot (T_{AC_0C} \cdot \cos \alpha_0 + T_{BC_0C} \cdot \cos \beta_0) ; \end{aligned} \quad (39)$$

de ( 30 ), ( 31 ) és ( 39 ) - cel:

$$\begin{aligned} T_{AC_0C} \cdot \cos \alpha_0 &= \frac{1}{2} \cdot b_0 \cdot m_0 \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot \cos \alpha_0 = \frac{1}{2} \cdot (b_0 \cdot \cos \alpha_0) \cdot (m_0 \cdot \operatorname{tg} \vartheta) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot (m_0 \cdot \operatorname{tg} \vartheta) = T_{AC_1C_2} , \end{aligned}$$

tehát:

$$T_{AC_0C} \cdot \cos \alpha_0 = T_{AC_1C_2} , \quad (40)$$

továbbá ( 33 ), ( 34 ) és ( 39 ) - cel:

$$\begin{aligned} T_{BC_0C} \cdot \cos \beta_0 &= \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot m_0 \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot \cos \beta_0 = \frac{1}{2} \cdot (a_0 \cdot \cos \beta_0) \cdot (m_0 \cdot \operatorname{tg} \vartheta) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot (m_0 \cdot \operatorname{tg} \vartheta) = T_{BC_1C_2} , \end{aligned}$$

tehát:

$$T_{BC_0C} \cdot \cos \beta_0 = T_{BC_1C_2} . \quad (41)$$

Most ( 39 ), ( 40 ) és ( 41 ) - gyel:

$$T_{ABC} = \frac{1}{\cos \delta} \cdot (T_{AC_0C} \cdot \cos \alpha_0 + T_{BC_0C} \cdot \cos \beta_0) = \frac{1}{\cos \delta} \cdot (T_{AC_1C_2} + T_{BC_1C_2}) = \frac{T_{ABC_2}}{\cos \delta} ,$$

tehát:

$$\underline{T_{ABC} = \frac{T_{ABC_2}}{\cos \delta} .} \quad (42)$$



Egy másik összefüggés:

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot m = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{m_0}{\cos \vartheta} = \frac{1}{\cos \vartheta} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot c \cdot m_0 \right) = \frac{1}{\cos \vartheta} \cdot T_{ABC_0} ,$$

tehát:

$$\underline{T_{ABC} = \frac{T_{ABC_0}}{\cos \vartheta} .} \quad (43)$$

Megjegyzések:

M1.  $\alpha_0 = \beta_0 = \delta$  esetén ( 39 ) szerint az az érdekes fejlemény áll elő, hogy

$$T_{ABC} = T_{AC_0C} + T_{BC_0C} ;$$

ez azt jelenti, hogy egyenlő tetőhajlások esetén a kontytető - síkidom területe egyenlő a kontysík által a nyeregtetőből levágott síkidomok területének összegével. Ez szintén megkönnyítheti a tetőfelszín - számítási munka elvégzését – v. ö.: [ 1 ]!

M2. A ( 42 ) és ( 43 ) képletek is azt a fontos összefüggést formulázzák meg háromszögek esetére, mely szerint:

$$A = \frac{T_{\text{vet}}}{\cos \psi} , \quad (44)$$

azaz egy  $S_1$  síkbeli síkidom területét megkapjuk, ha valamely  $S_2$  síkra vett merőleges vetületének területét elosztjuk a két sík által bezárt szög koszinuszával. Minthogy egy tetszőleges görbe vonalú síkidom sokszögekkel – azaz: beírt és körülírt sokszögekkel – közelíthető, a sokszögek pedig háromszögekre bonthatók, így látható, hogy a ( 44 ) formula a síklapú testek felszínszámításának az egyik alapképlete. Mint ilyet, alkalmazzuk például a tetők felszínének számítása során is. Ennek egyik meglepő tapasztalata lehet a tanulók számára az a tény, hogy tetszőlegesen bonyolult alaprajzú, állandó hajlású tető felszínszámítása esetén is közvetlenül csak az alaprajzi síkidom területszámítását kell elvégezni, a térbeli tetősík - idomok területszámítása helyett. Ez óriási könnyebbség. Ehhez képest igencsak meglepő az a tény, hogy a ( 44 ) képlet nem szerepel pl. az ács szakmai tankönyvekben. Néhány magyar lelőhely, ahol találkoztunk ( 44 ) - gyel, illetve megfelelőjével: [ 2 ], [ 3 ], [ 4 ].

M3. Figyelemre méltó az a körülmény is, hogy fentiek csak a középiskolai tananyag ismeretében is megérthetők, valamint a munka hasonló szellemben folytatható. A címbeli téma kidolgozásának folytatását most már az Olvasóra bizzuk.

M4. A ( 44 ) képlet tetőfelszín számítására való alkalmazásának lehetőségét kínálja [ 2 ] is – egy kis sajtóhibától eltekintve. A ( 44 ) képletnek az ács szakmai munkába való bevonására Hajdu Endre hívta fel figyelmemet, még a kezdetekkor. A német nyelvű szakmai segédkönyvekben ( 44 ) megfelelőjével sűrűn találkozhatunk – ld. pl.: [ 5 ]!

***Irodalom:***

- [ 1 ] – ***Galgóczi Gyula*** : Diplomamunka  
Soproni Egyetem Tanárképző Intézet, Sopron, 1999.
- [ 2 ] – Szerk. ***Boldizsár Tibor*** : Bányászati Kézikönyv, I. kötet  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1956.
- [ 3 ] – ***Dezső Ágnes ~ Édes Zoltán ~ Sárkány Péter*** : Középiskolai matematikai lexikon  
Corvina Kiadó, Budapest, 1997.
- [ 4 ] – ***Hajdu Endre*** : Ábrázoló geometria I.  
Jegyzet, Erdészeti és Faipari Egyetem, Sopron, 1983.
- [ 5 ] – ***Johannes Karduck ~ Richard Stein*** : Dachgeometrie  
3. Auflage, Verlagsgesellschaft Rudolf Müller GmbH, Köln - Braunsfeld, 1985.

Összeállította: Galgóczi Gyula  
mérnöktanár

Sződliget, 2012. január 10.